Programme de colle - Semaine n° 4: du 07/10/2024 au 11/10/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 2 - Suites réelles : révisions et compléments

Se reporter à un programme de colle précédent.

Chapitre 3 - Espaces vectoriels : révisions et compléments)

- Loi de composition interne, loi de composition externe sur un ensemble ;
- Définition d'un espace vectoriel réel ;
- Règles de calculs complémentaires dans un espace vectoriel ;
- Définition et description complète des espaces vectoriels de référence $(\mathbb{R}^n, +, .)$, $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), +, .)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$, $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$, $(\mathcal{A}(D, \mathbb{R}), +, .)$ (avec $D \subset \mathbb{R}$) **(HP)** ;
- Famille de vecteurs d'un espace vectoriel ;
- Combinaison linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel ;
- Stabilité de tout espace vectoriel par combinaison linéaire ;
- Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel : définition, caractérisation classique « en trois points » ;
- L'ensemble solution d'un système linéaire homogène comportant n lignes et p colonnes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$;
- **(HP)** Le commutant de toute matrice carrée d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation $\text{Vect}(...)$, divers exemples ;
- Famille génératrice d'un espace vectoriel, opérations transformant une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice, « simplification de " $vect$ " » ;
- Famille libre/liée : définition et exemples ;
- **(HP)** Vecteurs colinéaires ;
- **(HP)** Toute famille comportant 2 vecteurs colinéaires est liée ;
- Caractérisation de la liberté par l'unicité de l'écriture comme combinaison linéaire d'éléments de la famille considérée ;
- Liberté de toute famille réduite à un vecteur non nul ;
- **(HP)** Liberté de toute famille de vecteurs de $\mathbb{R}_p[X]$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) échelonnée en degrés ;
- Base d'un espace vectoriel : définition ;
- Caractérisation des bases d'un espace vectoriel E par l'existence et l'unicité de l'écriture de tout vecteur de E comme combinaison linéaire des éléments de la famille) ;
- Notion de coordonnées d'un vecteur dans une base ;

- Base canonique des espaces vectoriels de référence $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$;
- Espace vectoriel de dimension finie ;
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ;
- **(HP)** Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite ;
- Une famille libre dans un espace vectoriel de dimension n comporte au plus n vecteurs ;
- Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n comporte au moins n vecteurs ;
- Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E :
  * Si $\mathcal{F}$ est libre dans E et comporte n vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est une base de E ;
  * Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et comporte n vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$;
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.
- **(HP)** Droite vectorielle, plan vectoriel.
- Un espace vectoriel E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe une application linéaire bijective de E dans $\mathbb{R}^n$.
- Rang d'une famille de vecteurs ;
- Rang d'une matrice ;
- Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne modifie pas son rang ;
- Invariance du rang par transposition. Conséquence : les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifie pas son rang ;
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$;
- Matrice d'un vecteur u d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$;
- Linéarité et injectivité de l'opérateur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$;
- Matrice d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ d'un espace vectoriel E dans une base $\mathcal{B}$ de E, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$;
- Caractérisation matricielle des bases, caractérisation de l'inversibilité par le rang ;
- Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de E, notation $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$;
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$;
- $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Chapitre 4 - Calculs matriciels : révisions de ECG1

- Définition formelle du produit matriciel ;
- Propriétés usuelles vérifiées par le produit matriciel ;
- Calculs des puissances d'une matrice carrée : puissances d'une matrice diagonale, puissances d'une matrice triangulaire supérieure stricte **(HP)**, d'une matrice nilpotente **(HP)**, utilisation d'un polynôme annulateur (par le biais d'un raisonnement par récurrence amenant des relations de récurrence usuelles ou d'une division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$), utilisation de la formule du binôme de Newton dans le contexte matriciel, utilisation d'une relation de similitude ;
- Matrice inversible et inverse d'une matrice carrée ;
- Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible « à droite » si et seulement si elle est inversible « à gauche » ;
- Inverse de l'inverse d'une matrice inversible, inverse d'un produit de matrices inversibles, inverse des puissances d'une matrice inversible, inverse de la transposée d'une matrice inversible ;
- Caractérisation de l'inversibilité par les systèmes linéaires associés ;
- Caractérisation de l'inversibilité par le rang ;
- Une matrice A carrée d'ordre n est inversible si et seulement si la famille des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires, et donc *a fortiori* des matrices diagonales ;
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant ;
- Polynôme annulateur d'une matrice donnée, notation $P(A)$;
- Existence d'un polynôme annulateur non nul pour n'importe quelle matrice carrée donnée ;
- Utilisation d'un polynôme annulateur dans l'étude de l'inversibilité d'une matrice carrée donnée ;

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme ;
- Effectuer des calculs dans les espaces vectoriels de référence ;
- Montrer qu'un vecteur d'un espace vectoriel E s'écrit/ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de E donnés ;
- Montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E :
  * ... en identifiant un espace vectoriel de référence ;
  * ... en utilisant la caractérisation dite en 3 points des sous-espaces vectoriels de E ;
  * ... en montrant qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E tels que $\mathsf{F} = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$.
- Montrer qu'un ensemble F peut être muni d'une structure d'espace vectoriel :
  * ... en reconnaissant un espace vectoriel de référence ;
  * ... en montrant que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence que l'on identifiera clairement ;
- Manipuler la notation Vect ;
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E donné est/ n'est pas génératrice d'un espace vectoriel E donné ;
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est libre/liée dans E ;
- Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E donné de dimension finie est une base de E :
  * ... en montrant qu'elle est à la fois libre et génératrice de E ;
  * ... en montrant qu'elle est libre dans E ou génératrice de E, et en utilisant un argument de dimension ;
  * ... en montrant que $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible, où $\mathcal{B}$ désigne une base arbitrairement choisie de E ;
  * ... en montrant que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathsf{E})$.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie :
  * en reconnaissant un espace vectoriel de référence ;
  * en comptant le nombre de vecteurs d'une base d'une E
- Utiliser les propriétés de l'opérateur $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}$;
- Calculer le rang d'une matrice donnée ;
- Expliciter une matrice de passage d'une base à une autre ;
- Utiliser les propriétés des matrices de passage.
- Calculer les puissances d'une matrice carrée :
  * ... en reconnaissant une matrice remarquable (diagonale, triangulaire stricte, nilpotente) ;

  * ... en conjecturant la formule, et en démontrant cette formule par récurrence ou par disjonction des cas ;
  * ... en utilisant un polynôme annulateur Q et un raisonnement par récurrence associé à un argument de liberté, ou une division euclidienne de X^n par Q ;
  * ... en utilisant la formule du binôme de Newton ;
  * ... en utilisant une relation de similitude.

- Étudier l'inversibilité d'une matrice carrée et éventuellement expliciter, sous réserve d'existence, son inverse :
  * ... en revenant à la définition ;
  * ... en mettant en évidence un inverse à droite ou un inverse à gauche ;
  * ... en résolvant un système linéaire bien choisi ;
  * ... en calculant le rang de la matrice ;
  * ... en utilisant la caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires ;
  * ... en utilisant la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 ;
  * ... en utilisant un polynôme annulateur

« Et plus si affinités ... »

- Montrer des résultats théoriques généraux relatifs aux chapitre 2, 3 et 4.

Preuves exigibles

Propositions

1. Si $(E,+,.)$ est un espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de p vecteurs de E, alors vect $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E **[A]** ;
2. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ **[C]** ;
3. La famille $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de l'espace vectoriel de référence $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ **[A]** ;
4. Toute famille réduite à un vecteur non nul d'un espace vectoriel E est libre **[C]** ;
5. **(HP)** Toute famille de polynômes à degrés échelonnés est libre **[A]** ;
6. Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.0_E = 0_E$ **[A]** ;
7. Une famille de vecteurs est liée si et seulement si il existe un vecteur de cette famille qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille **[A]** ;
8. Caractérisation de la notion de base par l'existence et l'unicité de l'écriture comme combinaison linéaire de tout vecteur **[A]**.
9. Invariance du cardinal de toute base d'un espace vectoriel de dimension finie donné **[A]** ;
10. Un espace vectoriel E est de dimension n si et seulement si il existe une application linéaire bijective de E dans $\mathbb{R}^n$ **[A]** ;
11. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et vérifie $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ **[A]** ;
12. Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$. **[A]** ;
13. Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est linéaire et injective. **[A]** ;
14. La relation « être semblable à » (dans le contexte matriciel) est réflexive, symétrique et transitive **[A]** ;
15. **(HP)** Puissances de deux matrices semblables **[C]** ;
16. Formule du binôme de Newton dans le contexte matriciel **[A]** ;
17. **(HP)** Toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente **[A]** ;
18. Inversibilité et inverse du produit de deux matrices inversibles, d'une puissance d'une matrice inversible **[A]** ;
19. Caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant **[A]** ;
20. **(HP)** Inversibilité de toute matrice possédant un polynôme annulateur de coefficient constant non nul **[A]**.

Exemples/ exercices

1. Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\ker(A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), +, .)$ **[C]**.

2. **(HP)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le commutant de la matrice A est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ **[C]**.

3. On considère l'ensemble
$$G_3 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(0) = P'(1) = 0 \right\}$$
   - Montrer que G_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ **[C]**.
   - Déterminer une famille génératrice de G_3 **[C]**.
   - Déterminer une base et la dimension de G_3 **[C]**.

4. Le commutant de $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3 dont $\left(I_3, N, N^2\right)$ est une base **[TD]** ;

5. Pour tout espace vectoriel E, pour toute partie I de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E indexée par I, $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E **[TD]** ;

6. Calcul du rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **[C]** ;

7. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}'$ la famille $\mathcal{B}' = \left(X^2, X^2 - X, (X-1)^2\right)$.
   - $\mathcal{B}' = \left(X^2, X^2 - X, (X-1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ **[C]**.
   - Calcul de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(-2X^2 + 5X + 1\right)$ et de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(-2X^2 + 5X + 1\right)$ **[C]**+**[Ac]**.
   - Calcul de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ **[Ac]**.

8. Calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[C]**.

9. On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calcul de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir de l'égalité $M^2 - 3M + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et d'une division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ **[C]** ;

10. On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

    Calcul de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir de l'égalité $M^2 - 3M + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et de deux suites réelles auxiliaires **[Ac]** (**Exemple** 3).

11. On considère $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

    Calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme de Newton **[Ac]**.

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections** **[TD]** : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri **(HP)** (tri-bulles et tri-par-insertion)).

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- Le premier exercice sera de difficulté modérée, non théorique et essentiellement calculatoire ;
- Tous les élèves doivent être interrogés en priorité sur un ou plusieurs exercices d'algèbre linéaire ;
- On pourra éventuellement proposer, en 3ème exercice une étude complète d'une suite (définie par une relation de récurrence d'ordre 1, ou définie implicitement) ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.